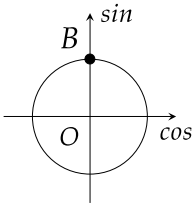
§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

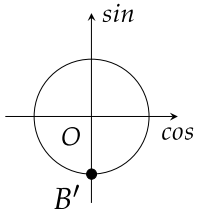
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$.

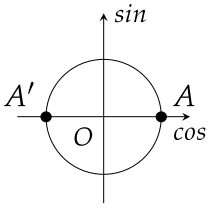
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$\boxed{\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi}$



$\boxed{\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi}$



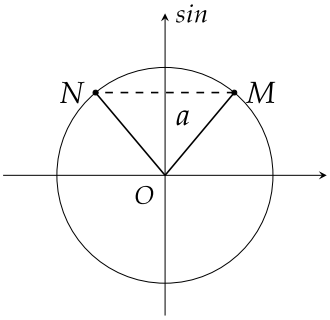
$\boxed{\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi}$

.

☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$



.

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

.

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

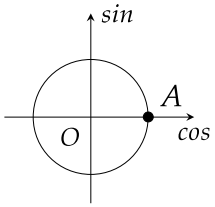
☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

.

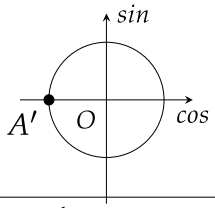
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\cos x = a$.

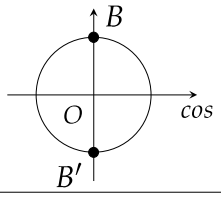
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$\boxed{\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi}$



$\boxed{\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi}$



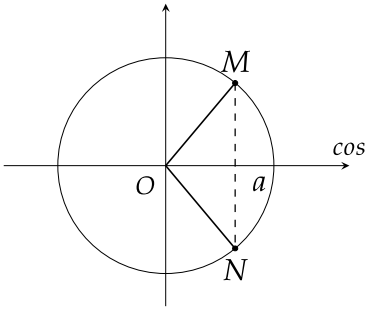
$\boxed{\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

.

☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$



. ② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

☑ Trường hợp $a \in [-1;1]$ nhưng khác các số ở trên.

.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

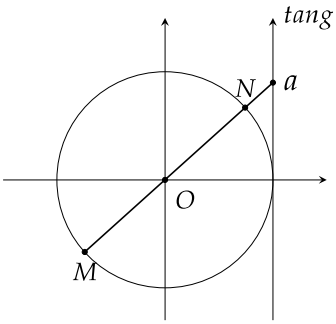
☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

.

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

3. Phương trình tan x = a.

☑ Trường hợp $a \in \left\{0; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.



① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

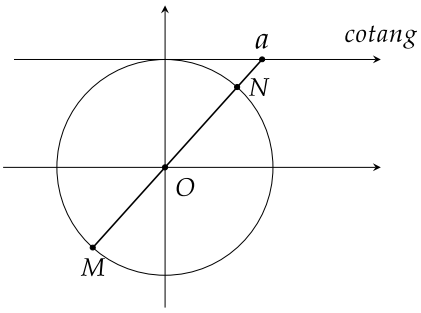
$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$$

☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$.

☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** $\boxed{\frac{1}{a}}$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$



① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$$

☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{5} - x\right) = 1$ c) $2\sin(x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$ e) $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$ f) $3\cos x - 1 = 0.$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 1$ c) $\tan(x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ e) $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0$ f) $(\tan x - 2)(\cot x + 1) = 0.$

Ví dụ 3. **(A.2014).** Giải phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

Dạng 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$ ② $\cos u = \cos v$ ③ $\tan u = \tan v$ ④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x).$ ② $-\cos x = \cos(\pi - x).$

③ $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right).$ ④ $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right).$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin 2x - \sin x = 0$ c) $\sin 5x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x - \cos x = 0$ e) $\cos 8x + \cos x = 0$ f) $\cos 4x - \sin x = 0$

Ví dụ 5. **(B.2013).** Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

Dạng 3. Giải các phương trình lượng giác có điều kiện xác định

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$ b) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} - \sin x} = 0$ c) $\tan x(1 - 2\sin^2 x) = 0$

Ví dụ 7. Giải phương trình $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0.$

- Đáp số $x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\left(\cot\frac{x}{3}-1\right)\left(\cot\frac{x}{2}+1\right)=0$.

- Đáp số $x=\frac{3\pi}{4}+k3\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\sqrt{3}+\tan x}=0$

- Đáp số $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

Dạng 4. Giải các phương trình lượng giác trên khoảng $(a;b)$ cho trước

① Giải phương trình, tìm các họ nghiệm $x=\alpha+k\pi$

② Vì $x\in(a;b)$ nên $a<\alpha+k\pi<b$, chuyển về tìm khoảng "dao động" của k.

③ Kết hợp với $k\in\mathbb{Z}$, ta chọn các giá trị k nguyên nằm trong khoảng vừa tìm được.

④ Với mỗi giá trị k, ta thay vào tìm nghiệm tương ứng.

Ví dụ 10. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3}\tan x-3=0$ trên $(0,3\pi)$.

b) $\sqrt{2}\sin(x-1)=-1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

c) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$ trên $(-\pi,\pi)$.

d) $\tan(3x+2)-\sqrt{3}=0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ với $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\tan(x+30^\circ)+1=0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

Lời giải.

Ví dụ 13. Tìm $x \in (-\pi;\pi)$ sao cho $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

Lời giải.